Zápočtový test z MA2, varianta A, **9. 5. 2017**

1. Zjistěte, zda existuje limita a pokud ano, určete její hodnotu:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-y}\right)$$

Odpověď zdůvodněte. Určete také definiční obor funkce.

Řešení:
Definiční obor je celá rovina s vynechanými přímkami $x=0$ a $x=y$, tj. pro funkci

$$f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-y}\right)$$

je

$$D(f): \quad x \neq 0 \quad \& \quad x \neq y$$

Funkce $\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-y}\right)$ je omezená a funkce $x+y$ je spojitá v $(0,0)$, tedy můžeme udělat odhad

$$0 \leq \left|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-y}\right)\right| \leq |x+y|$$

přičemž

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x+y| = 0$$

Z věty o limitě sevřené funkce tak máme, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-y}\right) = 0\ .$$

2. Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x,y) = x^2+y^2-12x+16y$ na množině

$$M: \quad x^2+y^2 \leq 25.$$

Načtrněte tuto množinu.

Řešení:
Množina M je kruh o poloměru 5. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2+y^2 < 25$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad x^2+y^2 = 25\ .$$

Extrém na M°:

$$f' = \big(2x-12,\ 2y+16\big) = (0,0)$$

nastává právě když $(x,y) = (6,-8)$. Tento bod ale neleží v M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x, y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 25$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x - 12,\ 2y + 16\big) = f'(a) = \lambda \Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Vyjádříme $x = \frac{6}{1-\lambda}$ a $y = -\frac{8}{1-\lambda}$ a dosadíme do zbývající rovnice. Dostaneme $\lambda = 3, -1$ a kandidáty na extrémy:

$$\big(3, -4\big), \qquad \big(-3, 4\big)$$

s odpovídajícími hodnotami

$$f\big(3, -4\big) = -75, \qquad f\big(-3, 4\big) = 125.$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodě $(-3, 4\big)$ a minima v bodě $(3, -4\big)$.

3. Spočítejte plošný obsah oblasti

$$E: \quad xy \geq 1 \quad \& \quad x + y \leq \frac{5}{2} \quad \& \quad x > 0 \quad \& \quad y > 0\ .$$

Tuto oblast načrtněte.

Řešení:
Oblast je vymezena hyperbolou $xy = 1$ a přímkou $x + y = \frac{5}{2}$, které se protínají v bodech $(2, \frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}, 2)$. Je určena také jako

$$E: \quad \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{5}{2} - x \quad \& \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2\ .$$

Obsah oblasti E je hodnota integrálu:

$$\iint\limits_E 1\ dS = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 1\ dy\ dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}\right)\ dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} - \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_{x=\frac{1}{2}}^{x=2} = \frac{15}{8} - 2\ln 2\ .$$